数理解析研究所講究録
1497巻 2006年 154-163

Schur の Q-関数の factorial analogue と同変コホモロジー[1]

池田　岳 — 岡山理科大学・理学部—
Takeshi Ikeda, Okayama University of Science

1　序　—Q-類似のすゝめ—

Schur 関数は，表現論の世界だけでなく幾何学の領域にも顔を出す．その例として，ここでは "Schubert calculus" について考えよう．現代の言葉で言えば，旗多様体もしくは Grassmann 多様体等のコホモロジー環において非常に具体的な計算をすることである．もっと狭く言えばコホモロジーの基底をなす **Schubert** 類の積を計算する手段である．Grassmann 多様体の場合，計算の基本的な道具として **Giambelli** の公式と **Pieri** のルールのふたつがある．Giambelli の公式は Schubert 類を表示する閉じた公式であり，Pieri のルールは Schubert 類どうしの積を帰納的に計算する方法を与える．Schubert 類は Schur 関数の「化身」であって，Giambelli の公式の格好は Jacobi-Trudi の公式そのもの，Pieri のルールは Littlewood-Richardson のルールの特別な場合である．こういったことを証明するには，旗多様体のコホモロジーを記述する **Schubert** 多項式の理論に持ち上げて，Grassmann 多様体の世界に射影する方法がすっきりしている．

唐突だが、ここでドグマを掲げる：

Schur 関数の出てくる話には Q-関数版がきっとある．

Q-関数は Schur が対称群の射影表現の既約指標を記述する対称多項式として発見したものである．だから立派な Schur 関数なのだが，有名な S-関数に較べると，やや地味な存在であることはいなめない．可積分系の世界では S-関数が KP 階層の τ-関数になっているのに対し，Q-関数は BKP 階層の τ-関数になっている．やはり地味ではあるが，無視してはいけない存在だという気持ちになる．本講演は「Q-関数に一票」という雰囲気の話である．

さて，冒頭の話の Q-類似は，すでに Pragacz [P] により発見されている．Lagrangian Grassmann 多様体のコホモロジーを考えると Schur 関数が果たすのと全く同じ役割を Schur の Q-関数が果たす．

一方，意外なことに，ごく最近になって，Giambelli の公式の同変コホモロジー版が現れた．Lakshmibai, Raghavan, Sankaran [LRS] が導いた式には Schur 関数のある変形版である興味深い多項式が現れた．実は Knutson, Tao [KT] は上述の３人よりも先に同じ

[1]この原稿は表現論シンポジウム（2005.11 静岡県掛川市）において行った講演「ラグランジアン・グラスマン多様体の同変コホモロジーと Q-関数」の予稿と全く同一です．数理解析研究所においては組み合わせ論的な公式についてもお話ししましたが，その結果はこの原稿には含まれていません．詳細は岡山大学の成瀬さんとの共著論文（準備中）にて発表したいと思います．

公式を全く別な方法で導いているのだが，Lakshmibai たちはそのことに気が付いていないようだ．

そうなると Schur の Q-関数の変形版が現れるような状況があるはずだ．その予想は正しく，比較的あっさりと答えが見つかった．こうして発見したと思った変形版 Q-関数は Ivanov [Iv] がすでに見つけており **"factorial Q-function"** と呼ばれていることがすぐに判明した．Ivanov がこの多項式を考えた動機は主に不変式論にある．幾何学的な設定からこの多項式が現れたのは今回の計算がおそらくはじめてである．

2 Lagrangian Grassmann 多様体

記号を固定する目的を兼ねて，Lagrangian Grassmann 多様体について必要なことをまとめておく．

2.1 基本設定

V を複素数体 $\mathbb{C}$ 上 $2n$ 次元のベクトル空間とする．ある基底を $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_{\bar{n}},\ldots,\boldsymbol{e}_{\bar{1}}$ とし，V 上のシンプレクティック形式を

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_{\bar{j}}) = -(\boldsymbol{e}_{\bar{j}},\boldsymbol{e}_i) = \delta_{ij}, \quad (\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_{\bar{j}},\boldsymbol{e}_{\bar{i}}) = 0$$

と定める．基底の添字集合 $\{1,\ldots,n,\bar{n},\ldots,\bar{1}\}$ において，後半の $\bar{n},\ldots,\bar{1}$ をこの順に $n+1,n+2,\ldots,2n$ と読み替えると便利なのでそうする．つまり，必要に応じて $n+i=\overline{n-i+1}$ という同一視をする．添字どうしの大小関係も，この同一視のもとで自然に与える．つまり $1<\cdots<n<\bar{n}<\cdots<\bar{1}$ という線型順序を入れておく．

V の部分ベクトル空間 W が等方的 (isotropic) であるとは，任意の $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in W$ に対して $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$ であることである．特に n 次元の等方的部分ベクトル空間は Lagrangian 部分空間と呼ばれる．Lagrangian 部分空間全体の集合を LG_n で表わす．LG_n は非特異な射影多様体の構造を持ち，その次元は $n(n+1)/2$ である．

2.2 等質空間として

$G=\mathrm{Sp}(V)$ を V のシンプレクティック形式を保つ可逆な線型変換のなす群とする．G は左から LG_n に自然に作用する．作用は推移的なので LG_n を等質空間とみなすことができる．対角行列からなる部分群 T は n 次元の代数的トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ と同型である．$B=\{g\in G \mid g$ は上三角行列$\}$ は T を含む Borel 部分群をなす．LG_n の基点として $L_0=\sum_{i=1}^n \mathbb{C}\boldsymbol{e}_i$ とおく．$P=\{g\in G\mid g(L_0)\subset L_0\}$ とおいて $LG_n=G/P$ という同一視を行う．

2.3 トーラス作用の固定点

S_{2n} を添字集合 $\{1,\ldots,n,\overline{n},\ldots,\overline{1}\}$ の対称群をあらわすものとする．S_{2n} の部分群 $W=\{w\in S_{2n}\mid w(\overline{i})=\overline{w(i)}\ (1\le i\le n)\}$ はペア (G,T) の Weyl 群と同一視できる．ここに「上付きバー」は添字集合上の対合として拡張している．W の元 w は $\{1,2,\ldots,n\}$ の行き先 $(w(1),\ldots,w(n))$ によって決まるから，以下ではしばしば $w=(w(1),\ldots,w(n))$ と表示する．W の部分群 W_P を $W_P=\{w\in W\mid 1\le w(i)\le n\quad(1\le i\le n)\}\cong S_n$ とおく．W の部分集合

$$W^P=\{w\in W\mid w(1)<\cdots<w(n)\}$$

は剰余集合 W/W_P の完全代表系になっている．W^P の元の総数は 2^n である．

$w\in W^P$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbb{C}\,e_{w(i)}$$

は V の Lagrangian 部分空間である．LG_n の点として $e(w)$ と表す．この $e(w)$ は T-固定点になっており，w として W^P の元を走らせると $e(w)$ たちが T-固定点を尽くす．

2.4 Schubert 多様体

$e(w)$ の B-軌道を $X(w)^\circ$ とする．$X(w)^\circ$ は $\ell(w)$ 次元のアフィン空間 $\mathbb{A}^{\ell(w)}$ と同型であり **Schubert** 胞体と呼ばれる．ここに $\ell(w)$ は w の Weyl 群の元としての長さを表す．各 Schubert 胞体にはただひとつの T-固定点として $e(w)$ が含まれていることに注意しておく．$X(w)^\circ$ の Zariski 閉包を $X(w)$ とし Schubert 多様体と呼ぶ．$X(w)$ は胞体 $X(w)^\circ$ と，それよりも次元の低いいくつかの Schubert 胞体たちの和集合になっている．

$X(w)$ は線型代数的に特徴付けることもできる．そのために $V_i=\sum_{j=1}^{i}\mathbb{C}e_j\ (1\le i\le 2n)$ とおく．特に $V_n=L_0$ は Lagrangian 部分空間である．$w\in W^P$ とする．このとき

$$X(w)=\{L\in LG_n\mid \dim_{\mathbb{C}}(L\cap V_{w(i)})\ge i\quad(1\le i\le n)\}$$

が成り立つ．

3 Schubert 多様体の特異性

目標は同変 Schubert 類を T-固定点へと制限（局所化）した際の明示公式なのだが，まず，特異点の重複度との類似性を指摘しておくのがわかりやすいと思う．

3.1 添字集合 W^P の組み合わせ論的記述（準備１）

W^P の元は例えば $n=5$ ならば $w=(1,3,4,\bar{5},\bar{2})$ のように，文字 $1,2,\ldots,n$ のいくつか（いくつでもよい）にバーをつけて大小の順に並べ替えたものなので，各 i $(1\le i\le n)$ はバーがあるかないかということを指定すれば決まる．そこで $w\in W^P$ に対して

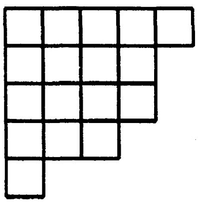
$$\delta_i=\begin{cases}1 & (i\in\{w(1),\ldots,w(n)\})\\ 0 & (i\notin\{w(1),\ldots,w(n)\})\end{cases}\qquad(1\le i\le n)$$

と定める．こうして 0 と 1 の列 $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ ができる．上の例では $\delta=(1,0,1,1,0)$ となる．さらに $\delta_{n+i}=1-\delta_{n+1-i}$ $(1\le i\le n)$ とおく．ちなみにこういう列をソリトン方程式の佐藤理論では Maya 図形と呼ぶ．上の例では $(1,0,1,1,0|1,0,0,1,0)$ という列ができる．「真ん中」には分かりやすく縦線を入れた．さて，それから

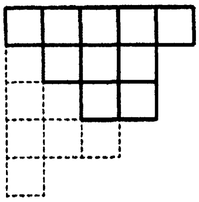
$$d_i=\text{ 右から } i \text{ 番目の 0 よりも左にある 1 の個数}$$

とおく．例では $(d_i)_{i=1}^5=(5,4,4,3,1)$ となる．これを Young 図形とみなしたものを $D(w)$ と書くことにする．こうしてできた $D(w)$ は一辺が n の正方形の中に含まれる．しかも，対角線に関して対称なものになる．実は d_i と $w\in W^P$ の関係を直接書けば $d_i=n+i-w(i)$ となる．後で Maya 図形による記述も必要なのでこのような順序で説明した．

Young 図形 $D(w)$ の「対角線を含めて上三角部分」を $\lambda(w)$ とする．$\lambda(w)$ はいわゆる "shifted diagram" である．上の例では $\lambda(w)=(5,3,2)$ となる．



$D(w)$



$\lambda(w)$

3.2 Bruhat-Chevalley 順序と Chevalley の重複度（準備２）

T-固定点 $e(v)$ が Schubert 多様体 $X(w)$ に含まれるための条件は $\lambda=\lambda(w),\mu=\mu(v)$ とするとき shifted diagrams として $\lambda\subset\mu$ となることである．特に $\lambda=\phi$（空の図形）には最大の Schubert 多様体 LG_n 全体が対応し，$\mu=(n,\ldots,2,1)$（跳びの無い階段型）には唯一の B-固定点である $L_0=\sum_{i=1}^n\mathbb{C}e_i$ が対応する．以下 $X(\lambda)=X(w),e(\mu)=e(v)$ という記号の濫用を行う．さらに詳しく「λ に □ をひとつ加えて μ ができる」ということは $X(\mu)\subset X(\lambda)$ であって，この埋め込みの余次元が 1 であるための必要十分条件である．このことを $\mu\to\lambda$ と書きあらわす．

引き続き $\lambda=\lambda(w),\mu=\mu(v)$ とする．以下，ルート系の言葉を使う．Bourbaki の標準的な記号を断りなしに使う箇所もある．さて $\mu\to\lambda$ という状況では $v=ws_\beta$ という

正ルート β が存在することがわかる．s_β は β に対応する reflection である．このとき **Chevalley** の重複度

$$c(w,v) = 2(\varpi_n, \beta)/(\beta,\beta)$$

を定義する．$\varpi_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$ は「n 番目」の基本ルートである．内積は ε_i $(1 \le i \le n)$ が正規直交するように入っている．β としては $2\varepsilon_i$ もしくは $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ $(i \neq j)$ タイプのものしか現れず，$c(w,v)$ はそれぞれ 1 もしくは 2 となる．

3.3 重複度

Schubert 多様体がいつ非特異であるかということについては多くの研究者の貢献がある．さらに詳しく Schubert 多様体 $X(w)$ に含まれる T-固定点 $e(v)$ の重複度を求めるという問題は基本的である．Schubert 多様体 $X(w)$ 上の点 $e(v)$ の重複度を $m_v(w)$ という記号で表わすことにする．

次は Lakshmibai, Weyman [LW] の結果である．

命題 1 重複度 $m_v(w)\,(w \in W^P)$ は次の関係式をみたす：

$$\deg(w,v)\cdot m_v(w) = \sum_{w' : w' \to w} c(w,w')\, m_v(w').$$

ここに w, v がそれぞれ $(\delta_i)_{i=1}^n, (\rho_i)_{i=1}^n$ に対応するとき $\deg(w,v) = \sum_{i=1}^n |\rho_i - \delta_i|$ である．

この結果を用いて [LW] では $X(w)$ が非特異であるための必要十分条件を与えている．$w \in W^P$ とし $D(w)$ を 3.1 節で導入した対称な Young 図形とする．$D(w)$ は一辺が n の正方形に含まれる．その意味での補集合を $D(w)^c$ と書く．

系 1 $X(w)$ が非特異であるための必要十分条件は $D(w)^c$ が正方形であることである．

4 同変コホモロジー

同変コホモロジーの教科書としては [GS] が挙げられる．de Rham 理論の立場から明解な解説がある．表現論に関連する例が多い論文 [Br] もたいへん参考になる．同変コホモロジーの定義や基本的な性質についてはこれらの文献やその引用文献を参照していただきたい．

T の作用を持つ多様体 LG_n には T-同変コホモロジー環 $H_T^*(LG_n)$ が定義される．$H_T^*(LG_n)$ は多項式環 $S = \mathbb{Z}[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n]$ 上の加群の構造を持つ．

4.1 同変 Schubert 類と固定点への制限

Schubert 多様体は T-不変な部分多様体なので T-同変基本類が定まる．それを通常の基本類と同様の記号 $[X(w)]$ で表わすことにする．これを同変 **Schubert** 類と呼ぶ．$H_T^*(LG_n)$ は $\mathcal{S}$ 上の自由加群であって $[X(w)]$ $(w \in W^P)$ が基底をなすことが知られている．

T-固定点がなす集合 LG_n^T を LG_n に埋め込む写像 $i : LG_n^T \hookrightarrow LG_n$ から引き戻し写像

$$H_T^*(LG_n) \longrightarrow H_T^*(LG_n^T) = \bigoplus_{v \in W^P} H_T^*(\{e(v)\}) = \bigoplus_{v \in W^P} \mathcal{S}$$

が誘導される．この写像は単射であることが知られている．したがって，各点 $e(v)$ の埋め込み写像 $i_v : e(v) \hookrightarrow LG_n$ から誘導される写像 $i_v^* : H^*(LG_n) \to H_T^*(\{e(v)\}) = \mathcal{S}$ の像として得られる多項式の集まり $i_v^*([X(w)])$ $(v \in W^P)$ を決定すれば，同変 Schubert 類 $[X(w)]$ を完全に記述できたことになる．以下 $i_v^*([X(w)]) \in H_T^*(\{e(v)\})$ を多項式として具体的に決定するということを目標にする．

4.2 T-同変重複度

重複度 $m_v(w)$ という非負整数を精密化した多項式だという考えのもとに，ボールド体を用いて $\boldsymbol{m}_v(w) = i_v^*([X(w)])$ と書くことにする．ここでは T-同変重複度と呼ぶ．以下の計算をするとそう呼びたくなる．例えば [MS] において "multidegree" と呼ばれているものと同じものである．T-同変重複度について基本的なことが書いてある文献として [Ros] がある．[Ros] では Joseph による代数的な定義と同変積分による解析的な定義が一致することが示されている．[CG] の 6.6 節では同変 Hilbert 多項式と呼ばれている．このように，非常に基本的な不変量のはずの T-同変重複度だが，いろいろな文脈で現れていろいろな名前で呼ばれてきた経緯があり，最近まで十分に整理ができていない感じがする．さらに詳しい文献や歴史については [MS], Chap. 8, note にまとめてあるので便利である．

記号： 以下 $x_i = -\varepsilon_i$ とおく．そうする理由は一種の正値性にある．

補題 1 $e(v)$ を T-固定点とする．v に対応する *Maya* 図形を $(\rho_i)_{i=1}^n$ とする．多項式の集まり $\boldsymbol{m}_v(w)$ $(w \in W^P)$ は次の関係式をみたす：

$$\mathbf{deg}(w, v) \cdot \boldsymbol{m}_v(w) = \sum_{w' : w' \to w} c(w, w')\, \boldsymbol{m}_v(w'),$$

ここに w が $(\delta_i)_{i=1}^n$ に対応するとき $\mathbf{deg}(w, v) = 2\sum_{i=1}^n (\rho_i - \delta_i) x_i$ とおいた．

重複度がみたす関係式の類似を探せばこの式に到達する．Chevalley による Pieri 型定理の同変版（の Grassmann 版）といえる．証明については [I] を参照されたい．ただしここでは，説明の都合上少し違う記号を使っている．

5 Factorial Q-functions

$x=(x_1,\ldots,x_n)$ を変数とし，変形パラメータとしてやはり不定元の $a=(a_i)_{i\geq 2}$ を用意する．また $a_1=0$ とおく．一般化階乗を次で定める：

$$(x|a)^k=\prod_{i=1}^{k}(x-a_i).$$

正整数の狭義減少列 $\lambda=(\lambda_1>\cdots>\lambda_k>0)$ をとる．Ivanov [Iv] によると *factorial Q-function* のひとつの表示は次で与えられる：

定義 1 $A(x)$ を $n\times n$ 行列 $((x_i-x_j)/(x_i+x_j))_{1\leq i,j\leq n}$ とし $B_\lambda(x|a)$ を $n\times k$ 行列 $((x_i|a)^{\lambda_{k-j+1}})$ とする．さらに

$$A_\lambda(x|a)=\begin{bmatrix} A(x) & B_\lambda(x|a) \\ -{}^tB_\lambda(x|a) & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと $(n+k)\times(n+k)$ の交代行列である．そこで

$$\mathrm{Pf}_\lambda(x|a)=\begin{cases}\mathrm{Pf}\,(A_\lambda(x_1,\ldots,x_n|a)) & \textit{if } n+k \textit{ is even;}\\ \mathrm{Pf}\,(A_\lambda(x_1,\ldots,x_n,0\,|a)) & \textit{if } n+k \textit{ is odd.}\end{cases}$$

とおく．Pf はパッフィアンを表わしている．こうして

$$Q_\lambda(x|a)=2^k\frac{\mathrm{Pf}_\lambda(x|a)}{D_n(x)}$$

とおく．ここに $D_n(x)=\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)/(x_i+x_j)$. である．

注：変形パラメータ a をゼロにとると Schur の Q-関数に一致する．ひとつのパッフィアンで表わすこともできる．組み合わせ論的な表示などを含め，詳しくは [Iv] を参照のこと．

6 主結果

変形パラメータを次のように選ぶ：

$$a_1=0,\quad a_i=x_{n-i+2}\quad(2\leq i\leq n+1).$$

定理 1 $w,v\in W^P$ とする．w に対応する *shifted diagram* を λ とし，v に対応する *Maya* 図形を $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$ とする．このとき

$$\boldsymbol{m}_v(w)=Q_\lambda(\delta_1x_1,\ldots,\delta_nx_n|a),$$

が成り立つ．

証明は $Q_\lambda(x|a)$ に対する Pieri 公式（Ivanov による）と補題 1 の関係式を比較することによる．

7 付録 — Gröbner 退化による T-同変重複度の計算—

グレブナ基底のアイデアを使うと，トーラス固定点への制限写像を具体的に計算することができる．[LRS] にしたがって概説を試みる．

補題 2 代数的トーラス $T = (\mathbb{C}^*)^m$ が d 次元の非退化な射影的代数多様体 X に代数的に作用しているとする．T-固定点は有限個であるとする．このとき，各固定点ごとに，それを含む T-不変な開集合 U であって，T のある表現空間と同型になっているようなものが存在する．

この結果は Bialynicki-Birula による．例えば [CG] の 2.4 節には Morse 理論の立場からの解説がある．

Y を X の T-不変な部分多様体で既約なものとする．Y に含まれる，ある T-固定点を y とする．補題により T の表現空間と同型な y の開近傍 U がとれる．U はアフィン空間 $\mathbb{A}^d$ と同型で y が原点 0 に対応する．U の座標 $X_1, \ldots, X_d$ であって，それぞれが T の固有ベクトルであるようなものをとることができる．y は孤立した固定点なので各座標関数への T の作用は自明ではないことに注意する．アフィン多様体 $Y \cap U$ 上で消える多項式関数がなす $R := \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d]$ のイデアルを I とする．

以下，グレブナ基底に関する基本的な用語を用いる．グレブナ基底の解説書は多数あるけれども，Miller と Sturmfles による教科書 [MS] は，いまここで取り扱っている問題については最適であると思われる．さて，多項式環 R に項順序をひとつ選んで J をその項順序に関する I のイニシャル・イデアルとする．J は単項式イデアルであることから，単項式イデアルからなる準素イデアル分解を持つ．$\mathfrak{p}_i\,(i = 1, \ldots, p)$ を J の極小素因子とすると，それらは $\mathfrak{p}_i = (X_1^{a_{1i}}, \ldots, X_d^{a_{di}})$（ただし a_{ji} は 0 もしくは 1）という形であることがわかる．ℓ_i を $R_{\mathfrak{p}_i}/JR_{\mathfrak{p}_i}$ の長さとする．

次は [LRS] の Theorem 3 として提示された命題である．

命題 2 埋め込み写像 $i : \{y\} \hookrightarrow X$ による，同変基本類 $[Y]$ の引き戻しは公式

$$i^*([Y]) = \sum_{i=1}^{p} \ell_i \prod_{j=1}^{d} \chi_i^{a_{ji}}$$

で与えられる．ここに $-\chi_i$ は X_i のウエイトである．

応用例：（LG_n の話に適用して）次が成り立つ：

$$m_w(w) = \prod_{(i,j)\in\lambda} (x_{w(i)} - x_{\overline{w(j)}}).$$

ここに λ は $w \in W^P$ に対応する shifted diagram である．この場合はアフィン空間による切り口は単なる座標超平面の交わりになるので簡単に計算ができる．

例： $w=(1,3,\bar{5},\bar{4},\bar{2})$. とすると $\lambda=(5,3)$. このとき
$m_w(w)=2x_1(x_1+x_3)(x_1-x_5)(x_1-x_4)(x_1-x_2)\times 2x_3(x_3-x_5)(x_3-x_4)$.

	$\bar{1}$	$\bar{3}$	5	4	2
1	$2x_1$	x_1+x_3	x_1-x_5	x_1-x_4	x_1-x_2
3		$2x_3$	x_3-x_5	x_3-x_4	
$\bar{5}$					
$\bar{4}$					
$\bar{2}$					

注：Lakshmibai らは，通常の Grassmann 多様体の場合に，この命題を用いて $m_v(v)$ に対する組み合わせ論的な表式（lattice path ごとの足し上げ）を与え，それを力業で行列式に変形した．私はそのような計算を避けて補題 1 の関係式を利用したのだが，Lakshmibai らの方法を追究すると組み合わせ論的には興味深い問題が出てきそうである．

以下の文献リストには，教科書的なものや，関連する話題を調べる際に役に立ちそうな基本的なものを多く集めておいた．講演の話題に直接関係があって重要だが抜けているものもあるので，それらについては [I] の引用文献を見ていただけたらと思う．

参考文献

[Br] M. Brion, Equivariant cohomology and equivariant intersection theory, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 514, *Representation theories and algebraic geometry* (Montreal, PQ, 1997) 1-37, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[CG] N. Chriss and V. Ginzburg, Victor Representation theory and complex geometry, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.

[GS] V. W. Guillemin and S. Sternberg, Supersymmetry and equivariant de Rham theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1999.

[I] T. Ikeda, Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian, arXiv:math.AG/0508110

[Iv] V. N. Ivanov, Interpolation analogue of Schur Q-functions, Zap. Nauc. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. 307 (2004) 99-119. arXiv:math.CO/0305419.

[KT] A. Knutson and T. Tao, Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians, Duke Math. J. 119 (2) (2003) 221-260.

[LRS] V. Lakshmibai, K.N. Raghavan, and P. Sankaran, Equivariant Giambelli and determinantal restriction formulas for the Grassmannian, arXiv:math.AG/0506015.

[LW] V. Lakshmibai and J. Weyman, Multiplicities of points on a Schubert variety in a minuscule G/P, Adv. in Math. 84 (1990) 179-208.

[MS] E. Miller and B. Sturmfels, Combinatorial Computational Algebra, GTM 227, Springer 2005.

[P] P. Pragacz, Algebro-geometric applications of Schur S- and Q-polynomials, in *Séminaire d'Algèbre Dubreil-Malliavin 1989-1990*, Springer Lecture Notes in Math. 1478 (1991) 130-191.

[Ros] W. Rossmann, Equivariant multiplicities on complex varieties, Société Mathématique de France, Astérisque 173-174 (1989), 313-330.